

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ
Кафедра математики та моделювання



Затверджую:

Декан факультету
машинобудування

Кассов В. Д.

« 20 » 08 2021 р

Гарант освітньої програми:

Кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Ровенська О.Г.

« 05 » 05 2021 р

Розглянуто і схвалено на
засіданні кафедри математики та
моделювання

Протокол № 4 від 5 травня 2021 р

В.о. зав. кафедри

Астахов В.М.

РОБОЧА ПРОГРАМА

«Теорія функцій комплексної змінної»

галузь знань 01 Освіта/Педагогіка

спеціальність 014 Середня освіта (Математика)

ОПП (магістр) Математика

кваліфікація

Магістр середньої освіти (математика).

Учитель математики та економіки.

Викладач математики.

Розробник: О.А. Костіков, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Розроблено за підтримки громадської організації «Smart Maths»

<http://formathematics.com/>

2021 – 2022 навчальний рік

І. РОЗПОДІЛ ГОДИН

Форма навчання	Кредитів ECTS	Годин	Аудиторних годин				Самост. робота	Розподіл за семестрами		
			Лекції	Практичні	Лабораторні	Всього		Екзамени	Заліки	ДЗ
Денна/заочна	2,5	75	18/8	9/4	–	27/12	48/63			
	2,5	75	18/0	9/0		27/0	48/75	+		
	5	150	36/8	18/4		54/12	96/138			

2. МЕТА ТА ЗАВДАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Метою викладання навчальної дисципліни є надання систематичних знань студентам з основ класичної теорії функцій комплексної змінної, тобто ознайомлення студентів з основними ідеями та апаратом теорії функції комплексної змінної, що дає студентам фундаментальну математичну підготовку, необхідну для їх майбутньої професійної діяльності. Більш загальна мета - на прикладі математичних понять і методів ТФКЗ показати суть наукового підходу, навчити прийомам дослідження та розв'язання математично формалізованих задач.

Основні завдання вивчення дисципліни:

- Простежити внутрішню логіку розвитку поняття комплексного числа, функції комплексної змінної, теорії границь, теорії диференціального та інтегрального числення функцій однієї комплексної змінної, теорії рядів;
- Показати застосування понять та фактів комплексного аналізу до розв'язання конкретних задач.

Навчання дисципліни сприяє формуванню професійної компетентності випускника, яка поєднує у собі математичні знання майбутнього вчителя, його психолого-педагогічну та методичну підготовку, особистісні якості, формувати здатність організувати навчально-виховний процес на рівні сучасних вимог. А саме, у процесі вивчення дисципліни студент має здобути наступні компетентності:

Програмні компетентності
<i>Загальні</i>
Аналіз і синтез: здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
Творчість та інновації: здатність створювати та передавати нові ідеї, генерувати інноваційні рішення відомих проблем або дослідницьких ситуацій.
Інформаційні технології: засвоєння нових знань, оволодіння сучасними інформаційними технологіями.
Розвиток та самовдосконалення: здатність проводити самооцінку та аналіз власних досягнень, здатність до самоосвіти та вдосконалення професійних навичок.

Фахові

Фундаментальні знання та розуміння: здатність використовувати системні знання з фундаментальної математики, економіки та методик їх навчання, фундаментальні знання змісту шкільного курсу математики сучасної школи.

Професійні навички: здатність застосовувати сучасні методи й освітні технології навчання, аналізувати особливості сприйняття та засвоєння учнями і студентами навчальної інформації з метою прогнозу ефективності та корекції освітнього процесу.

Вирішення проблем: здатність застосовувати сучасні математико-статистичні методи та пакети комп'ютерної математики до створення і аналізу математичних моделей реальних задач і процесів.

Інформаційні освітні технології: здатність до використання сучасних методів навчання, пов'язаних із використанням ІКТ і STEM технологій: мультимедійне навчання; комп'ютерне програмоване навчання; інтерактивне навчання; дистанційне навчання; використання Інтернет-технологій.

Завдання вивчення дисципліни

Завдання вивчення дисципліни визначаються програмними результатами навчання, а саме випускник магістратури:

«Запам'ятовування, знання»	Знання та розуміння основ навчальних дисциплін фундаментального циклу. Знання, що відносяться до базових областей математики та економіки, в обсязі достатньому для успішної роботи у наукових групах. Спеціалізовані концептуальні знання, набуті у процесі навчання та/або професійної діяльності на рівні новітніх досягнень, які є основою для оригінального мислення та інноваційної діяльності, зокрема в контексті дослідницької роботи за освітньою програмою.
«Розуміння»	Будувати математичні моделі, алгоритмізувати розв'язування математичної задачі. Інтерпретувати спеціалізовані знання на рівні, достатньому для розуміння наукової статті за обраними предметними спеціальностями.
«Уміння та застосування знань»	Організувати пошук відповідних наукових джерел, які мають безпосереднє відношення до фундаментальної математики та актуальних проблем методики її навчання, в тому числі з використанням іноземної мови.
«Аналіз» та «синтез»	Аналізувати основні підходи, теорії та концепції предметного циклу дисциплін з математики та економіки з урахуванням існуючих міжпредметних зв'язків. Мати уявлення про сучасний математичний апарат, який застосовують в природничих науках, інженерних та економічних дослідженнях.
«Автономія та відповідальність»	Усвідомлювати необхідність подальшого навчання, вивчення, аналізу, узагальнення та поширення передового педагогічного досвіду, систематично підвищувати свою професійну кваліфікацію

Теоретичні знання

Студент повинен знати: основні означення та поняття теорії функції комплексної змінної, а саме:

- комплексні числа та дії над ними.
- стереографічна проекція та сфера Рімана,
- криві в комплексній площині,
- однозв'язні та багатозв'язні області,
- диференційованість комплексно-значних функцій комплексної змінної, умови Коші-Рімана.
- гармонічні функції,
- конформні відображення,
- аналітичні функції,
- гідромеханічний зміст аналітичних функцій,
- однолисність функції комплексної змінної.
- основні властивості конформних відображень.
- інтеграл функції вздовж шляху,
- первісна функції, первісна функції вздовж шляху,
- гомотопні шляхи, інтеграл Коші та інтеграл типу Коші,
- ряди Тейлора та Лорана для комплексно значних функцій комплексної змінної їх множини збіжності та властивості.
- ізольовані особливі точки функції однозначного характеру: усувна, полюс, істотно-особлива,
- лишки функції комплексно значних функцій комплексної змінної.

Практичні уміння та навички

Студент повинен уміти:

- будувати конформні відображення областей за допомогою елементарних функцій комплексної змінної,
- будувати розвинення функцій комплексної змінної в степеневі ряди та ряди Лорана,
- визначати особливі точки аналітичних функцій та визначати тип особливості,
- інтегрувати функції комплексної змінної,
- обчислювати лишки функції в ізольованих особливих точках,
- застосовувати теорію лишків до обчислення інтегралів та сум.

Міждисциплінарні зв'язки: алгебра, математичний аналіз, функціональний аналіз, теорія функцій.

3. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОГО ЗМІННОГО. ДИФЕРЕНЦІУВАННЯ ТА ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОГО ЗМІННОГО

Тема 1.1. Комплексні числа.

- Операції над комплексними числами.
- Властивості арифметичних операцій, геометричне зображення комплексних чисел.
- Поняття про модуль та аргумент комплексного числа.
- Теорема про модуль та аргумент.
- Властивості модуля комплексних чисел.
- Обчислення кореня комплексного числа.

Тема 1.2. Границя послідовності комплексних чисел

- Основний принцип теорії границь
- Поняття граничної точки
- Обмежені та необмежені послідовності комплексних чисел
- Теорема Больцано-Вейерштраса
- Поняття збіжної послідовності комплексних чисел
- Основні теореми теорії границь
- Критерій Коші

Тема 1.3. Числова сфера. Нескінчено віддалена точка

- Зображення комплексних чисел на сфері
- Нескінчено віддалена точка
- Формули стереографічної проєкції
- Основна властивість стереографічної проєкції
- Зберігання кутів

Тема 1.4. Функції комплексного змінного.

- Функція комплексної змінної.
- Неперервні функції.
- Одно- та багатозначні функції.
- Приклади елементарних однозначних і багатозначних функцій: лінійна, степенева, корінь n -го степеня.
- Збіжність функціональних і степеневих рядів з комплексними членами. Теорема Коші — Адамара.
- Показникова, тригонометричні та гіперболічні функції комплексної змінної.
- Логарифмічна функція.
- Інтеграл від функції комплексної змінної вздовж спрямлюваної (кусково-гладкої) кривої та його властивості.

- Формула зведення обчислення від інтеграла від функції комплексної змінної до інтеграла Рімана.

Тема 1.5. Степеневі ряди

- Поняття області збіжності степеневому ряду
- Перша теорема Абеля
- Круг збіжності
- Поняття найбільшої границі
- Визначення радіусу збіжності
- Рівномірна збіжність степеневому ряду
- Друга теорема Абеля

Тема 1.6. Похідна функції комплексної змінної

- Похідна функції комплексної змінної: означення та приклади.
- Формальні правила обчислення похідних.
- Теорема про диференційовність функції комплексної змінної.
- Умови Коші — Рімана в декартових і полярних координатах.
- Приклади застосування умов Коші — Рімана для встановлення диференційованості елементарних функцій.
- Формула обчислення уявної частини диференційованої функції комплексної змінної через відому дійсну частину.

Тема 1.7. Означення та властивості аналітичних функцій

- Поняття аналітичної функції.
- Означення та основні властивості аналітичних функцій.
- Два різних способи означення аналітичної функції — через диференційовність і через суму збіжного степеневому ряду.
- Геометрична інтерпретація аналітичної функції.
- Означення однолисткової функції.
- Приклади однолисткових функцій та їх геометрична інтерпретація

Тема 1.8. Інтегрування аналітичних функцій

- Інтеграл вздовж замкненого контура від аналітичної функції в одній та багатозв'язній областях.
- Інтегральна формула Коші.
- Теорема про середнє значення.
- Теорема про максимум модуля.
- Формула Коші для похідної аналітичної функції.
- Оцінки модуля похідної аналітичної функції.
- Нескінченна диференційовність аналітичної функції.
- Способи означення аналітичної функції.
- Теорема Ліувіля.

Тема 1.9. Конформні відображення

- Означення та властивості конформних відображень.
- Основна задача теорії конформних відображень.
- Теорема Рімана.
- Дробово-лінійні конформні відображення та їх властивості.

- Формула знаходження дробово-лінійного відображення за трьома точками. Конформне відображення комплексної півплощини та круга в півплощину або круг.
- Відображення многокутників.
- Інтеграл Крістофеля-Шварца.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.

РЯДИ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ. ІЗОЛЬОВАНІ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНОЇ ФУНКЦІЇ. ТЕОРІЯ ЛИШКІВ. ГАРМОНІЧНІ ФУНКЦІЇ

Тема 2.1. Представлення аналітичних функцій рядами.

- Ряд Тейлора функції аналітичної в колі.
- Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.
- Нулі аналітичної функції, теорема про однозначність.

Тема 2.2. Ряди Лорана.

- Розкладання аналітичної функції в ряд Лорана.
- Правильна та головна частини ряду Лорана.
- Єдине розкладання в ряд Лорана.

Тема 2.3. Класифікація особових точок однозначної функції.

- Три типа ізольованих особових точок.
- Усунена особова точка.
- Полюс
- Зв'язок між нулем та полюсом
- Суттєво особлива точка
- Поведінка функції в околі ізольованої особливої точки

Тема 2.4. Поведінка аналітичної функції в нескінченості

- Окіл нескінченно віддаленої точки
- Розвинення Лорана в околі нескінченно віддаленої точки
- Поведінка функції в околі нескінченно віддаленої точки
- Умови обертання інтегралу типу Коші в інтеграл Коші

Тема 2.5. Простіші класи аналітичних функцій

- Цілі функції
- Мероморфні функції
- Розвинення раціональної функції на простіші дроби

Тема 2.6. Основи теорії лишків

- Означення лишка.
- Методи обчислення лишка однозначної аналітичної функції.
- Обчислення лишка в полюсі.
- Лишок у нескінченно віддаленій точці.
- Основна теорема теорії лишків.

Тема 2.7. Застосування теорії лишків

- Обчислення контурних інтегралів.
- Обчислення невластних інтегралів дійсного аналізу за допомогою теорії лишків.
- Логарифмічний лишок.
- Теорема Руше

Тема 2.8. Гармонічні функції та їх застосування

- Гармонічні функції.
- Аналітичні та спряжені гармонічні функції.
- Побудова гармонічної функції за спряженою.
- Інваріантність оператора Лапласа відносно конформних відображень.
- Задача Діріхле.

Тема 2.9. Застосування гармонічних функцій

- Розв'язання задачі Діріхле за допомогою функції Гріна.
- Функція Гріна задачі Діріхле: означення, фізичний зміст.
- Формула Гріна.
- Побудова функції Гріна для півплощини та круга.
- Розв'язання задачі Діріхле для круга.
- Формула Пуасона.
- Розв'язання задачі Діріхле для півплощини.
- Формула Шварца.

Формулювання спеціальних результатів із їх розподілом за модулями представлені нижче:

Модулі	Зміст програмного результату навчання
Комплексні числа. Функції комплексного змінного. Диференціювання та інтегрування функцій комплексного змінного.	Знання та розуміння основ навчальних дисциплін фундаментального циклу. Знання, що відносяться до базових областей математики та економіки, в обсязі достатньому для успішної роботи у наукових групах. Спеціалізовані концептуальні знання, набуті у процесі навчання та/або професійної діяльності на рівні новітніх досягнень, які є основою для оригінального мислення та інноваційної діяльності, зокрема в контексті дослідницької роботи за освітньою програмою Здобувач вищої освіти здатний <ul style="list-style-type: none"> ✓ Будувати математичні моделі, алгоритмізувати розв'язування математичної задачі. ✓ Інтерпретувати спеціалізовані знання на рівні, достатньому для розуміння наукової статті за обраними предметними спеціальностями ✓ Організовувати пошук відповідних наукових джерел, які мають безпосереднє відношення до фундаментальної математики та актуальних проблем методики її навчання, в тому числі з використанням іноземної мови. ✓ Аналізувати основні підходи, теорії та концепції предметного циклу дисциплін з математики та економіки з

Експерсії																		
Всього	48	5	5	5	5	5	5	6	6	6								
Навчальне навантаження студентів	75	9	7	9	7	9	7	10	8	9								

Підсумковий контроль-іспит

4.2 Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин				
	денна форма навчання				
	усього	у тому числі			Література
л		п	с.р.		
1	2	3	4	5	6
Змістовий модуль 1. Комплексні числа. Функції комплексного змінного. Диференціювання та інтегрування функцій комплексного змінного..					
Тема 1.1. Комплексні числа.	8	2	1	5	[1] с.16-34 [2] с.10-16
Тема 1.2. Границя послідовності комплексних чисел	8	2	1	5	
Тема 1.3. Числова сфера. Нескінчено віддалена точка	8	2	1	5	[1] с.31-35
Тема 1.4. Функції комплексного змінного.	8	2	1	5	[1] с.45-52, [2] с.16-42
Тема 1.5. Степеневі ряди.	8	2	1	5	[1] с.68-58
Тема 1.6. Похідна функції комплексної змінної	8	2	1	5	[2] с.19-24
Тема 1.7. Означення та властивості аналітичних функцій	9	2	1	6	[1] с.69-92
Тема 1.8. Інтегрування аналітичних функцій	9	2	1	6	[1] с.143-148. [2] с.43-65
Тема 1.9. Конформні відображення	9	2	1	6	[1] с.97-104. [2] с.105-197
Разом за змістовим модулем 1	75	18	9	48	
Змістовий модуль 2. Ряди аналітичних функцій. Ізольовані особливі точки однозначної функції. Теорія лишків. Гармонічні функції					
Тема 2.1. Представлення аналітичних функцій рядами.	8	2	1	5	[1] с.195-214, [2] с.65-93
Тема 2.2. Ряди Лорана..	8	2	1	5	
Тема 2.3. Класифікація особливих точок однозначної функції..	8	2	1	5	[1] с.215-223, [2] с.78-84
Тема 2.4. Поведінка аналітичної функції в нескінченості	8	2	1	5	
Тема 2.5. Простіші класи аналітичних функцій	8	2	1	5	[1] с.224-227, [2] с.237-249
Тема 2.6. Основи теорії лишків.	8	2	1	5	
Тема 2.7. Застосування теорії лишків	9	2	1	6	[1] с.243-254, [2] с.199-234
Тема 2.8. Гармонічні функції.	9	2	1	6	
Тема 2.9. Застосування гармонічних функцій.	9	2	1	6	[2] с.215-232
Разом за змістовим модулем 2	75	18	9	48	
Усього годин	150	36	18	96	

5. САМОСТІЙНА РОБОТА

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	ЗМ 1 Границя послідовності комплексних чисел Числова сфера. Нескінчено віддалена точка Степеневі ряди. Розв'язування задач з тем змістового модуля	46
2	ЗМ 2 Поведінка аналітичної функції в нескінченості Гармонічні функції. Застосування гармонічних функцій Розв'язування задач з тем змістового модуля.	46
	РАЗОМ	96

6. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Метою індивідуального завдання є формування вмінь виконувати методичний аналіз навчального матеріалу теми, задавати на конструктивному рівні цілі вивчення всієї теми та цілі уроку, планувати вивчення теоретичного матеріалу за обраною темою, формувати методику вивчення математичних (економічних) понять та теорем, проектувати контроль знань та різноманітні види самостійної та позакласної роботи учнів.

Виконання індивідуального завдання передбачає наступні розробки:

1. Постановка цілей навчання теми. При цьому необхідно скласти загальний опис цілей вивчення теми, сформулювати перелік видів діяльності учнів за обраною темою через уміння та сформулювати навички через систему вправ, які складаються з різнорівневих завдань за поданими вміннями.
2. Планування вивчення теоретичного матеріалу. При цьому треба зробити відбір та структурування понять та теорем, логічний аналіз означень, теорем, методів доведення та на цій основі скласти тематичне планування теми.
3. Методика формування поняття. Описати методику формування одного поняття з урахуванням наступних етапів: введення, засвоєння, застосування.
4. Методика вивчення теореми. Розробити методику вивчення теореми за основними етапами: введення, засвоєння, застосування.
5. Складання плану-конспекту одного з уроків за обраною темою.

№	Теми для написання індивідуальної роботи
1.	Комплексні числа.
2.	Границя послідовності комплексних чисел
3.	Числова сфера. Нескінчено віддалена точка
4.	Функції комплексного змінного.
5.	Степеневі ряди
6.	Похідна функції комплексної змінної

7.	Означення та властивості аналітичних функцій
8.	Інтегрування аналітичних функцій
9.	Конформні відображення
10.	Представлення аналітичних функцій рядами.
11.	Ряди Лорана
12.	Класифікація особових точок однозначної функції
13.	Поведінка аналітичної функції в нескінченості
14.	Простіші класи аналітичних функцій
15.	Основи теорії лишків.
16.	Нерівності
17.	Застосування теорії лишків
18.	Гармонічні функції.
19.	Застосування гармонічних функцій.

7. МЕТОДИ НАВЧАННЯ

Підвищенню ефективності вивчення курсу сприяє використання системи евристичного навчання. Перевагу слід надати наступним формам навчання:

а) лекції: інформативні, аналітичні, проблемні;

б) евристичний семінар, практичні, лабораторні заняття, тренінги.

Доцільні методи навчання: мозкові атаки, метод проектів, рольові та дидактичні ігри, евристичні бесіди та ін.

8. ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

8.1 Критерії оцінювання. Критерієм успішного проходження підсумкового оцінювання є досягнення мінімального порогового балу. Оцінювання навчальних досягнень студентів здійснюється на основі використання модульно-рейтингової системи оцінювання. Розподіл балів за різними видами робіт та шкала оцінювання представлені у таблиці 9.

8.2. Засоби оцінювання. Засоби оцінювання та методи демонстрування результатів навчання за даним курсом є усні опитування на практичних та лекційних заняттях, тестові завдання, реферати, доповіді, есе, індивідуальні завдання, письмові контрольні роботи.

8.3. Питання для перевірки засвоєння матеріалу:

1. Комплексна площина. Функції комплексної змінної (ФКП). Розширена комплексна площина і сфера Рімана.
2. Комплексна диференційовність. Похідна. Теорема Коші-Рімана, умови Коші-Рімана. Аналітичні функції.
3. Геометричний зміст модуля і аргумента похідної. Конформні відображення.
4. Функції z^n , $\ln z$, лінійні, дробово-лінійні, тригонометричні та гіперболічні, Жуковського, e^z , $\ln z$. Властивості конформного відображення, що дається цими функціями.
5. Означення інтеграла Рімана, його властивості. Первісна як інтеграл зі змінною верхньою межею.
6. Інтегральна формула Коші: випадок трикутного контура, загальний випадок.
7. Наслідки інтегральної формули Коші: теорема про середнє, теорема Ліувілля.
8. Гармоничні функції, їх зв'язок з аналітичними функціями. Формула Пуассона.
9. Нескінченна диференційовність аналітичної функції. Формула Коші для похідних. Теорема Морера.
10. Функціональні послідовності і ряди. Рівномірна збіжність всередині області. Теорема Вейєрштрасса про рівномірно збіжні функціональні ряди.
11. Степеневі ряди. Формула Коші-Адамара. Аналітичність: суми ряду. Формули Коші, Тейлора для коефіцієнтів.
12. Теорема про розвинення аналітичної функції в ряд. Еквівалентність означень аналітичної і голоморфної функцій.
13. Нулі аналітичних функцій. Теорема єдиності.
14. Ізольовані особливі точки однозначного характеру. Теорема про усуну особливу точку. Полнос і істотна особлива точка. Теорема Ю.В.Сохоцького.
15. Ряди Лорана. Формули для коефіцієнтів. Теорема Лорана. Нерівність Коші.
16. Головна частина ряду Лорана в ізольованій особливій точці. Характеристика усунуї особливої точки, полюса, істотно особливої точки в термінах головної частини ряду Лорана.
17. Цілі та мезоморфні функції.
18. Лишки. Теорема Коші про лишки. Лишок в нескінченно віддаленій точці.
19. Принцип аргументу. Теорема Руше. Основна теорема вищої алгебри.

20. Лема Жордана. Застосування теорії лишків до обчислення інтегралів типу:
 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)dx}{Q_m(x)}$; $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \lambda x dx$; $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \lambda x dx$; $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx$.
21. Принцип збереження області. Критерий локальної однолистності.
22. Принцип максимуму модуля. Лема Шварца.
23. Аналітичні функції і конформні відображення. Теорема Рімана. Конформна класифікація однозв'язних областей.
24. Функція Гріна плоскої однозв'язної області. Крайова задача Діріхле для рівняння Пуассона.
25. Гідромеханічне тлумачення аналітичних функцій.

9. РОЗПОДІЛ БАЛІВ, ЯКІ ОТРИМУЮТЬ СТУДЕНТИ

Від заняття або контрольного заходу	Балів за одно заняття або контрольний захід	За семестр		До 1-й атестації	
		кількість занять або контрольних заходів	сума балів	кількість занять або контрольних заходів	сума балів
Індивідуальне завдання	8	5	40	3	24
Підготовка есе, докладу з оформленням реферату	20	1	20	-	-
Модул.контр.	40	1	40	1	20
Всього			100		44

За участь у науковій роботі, вивчення спеціальної літератури і поглиблене вивчення курсу студенту можуть призначатися додаткові бали, але не більше ніж 10 балів.

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка за національною шкалою	
	для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку
90 – 100	відмінно	зараховано
74-89	добре	
60-73	задовільно	

0-69	незадовільно	не зараховано
------	--------------	---------------

10. ПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ НА ЕКЗАМЕН

Питання до іспиту

1. Комплексні числа. Операції над комплексними числами.
2. Геометрія поля комплексних чисел. Формула Муавра.
3. Нескінченно віддалена точка і стереографічна проекція.
4. Послідовності комплексних чисел. Основні властивості збіжних послідовностей. Критерій Коші. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
5. Ряди комплексних чисел, їх збіжність. Дослідження ряду на збіжність.
6. Функції комплексної змінної. Криві та області на комплексній площині.
7. Границя і неперервність функції у точці. Властивості.
8. Властивості функцій неперервних на компактній множині. Теорема Вейерштрасса. Теорема Кантора.
9. Функціональні послідовності та ряди, їх збіжність.
10. Рівномірна збіжність функціональної послідовності і функціонального ряду. Критерій Коші. Ознака Вейерштрасса.
11. Степеневий ряд. Теорема Коші-Адамара. Структура області збіжності. Теорема Абеля.
12. Рівномірна збіжність степеневого ряду.
13. Означення функцій $w = \exp z$, $w = \sin z$, $w = \cos z$. Їх властивості.
14. Похідна і диференціал функції комплексної змінної. Правила диференціювання.
15. Необхідні та достатні умови диференційовності функції комплексної змінної.
16. Гармонійні функції. Рівняння Лапласа.
17. Геометричний зміст модуля і аргументу похідної. Поняття про конформне відображення.
18. Принцип збереження області. Теорема Рімана.
19. Гідродинамічний зміст похідної.
20. Ціла лінійна функція та її властивості.
21. Дробово-лінійна функція та її найпростіші властивості.
22. Групова та кругова властивості дробово-лінійного відображення. Теорема про три точки.
23. Функція Жуковського та її застосування.
24. Гіперболічні функції та їх властивості.
25. Ціла степенева функція та обернена до неї.
26. Поверхня Рімана.
27. Обернені тригонометричні функції.
28. Загальні показникова і степенева функції.
29. Означення інтеграла функції комплексної змінної та його подання через криволінійні інтеграли другого роду.
30. Властивості інтегралів функцій комплексної змінної та їх обчислення зведенням до обчислення ріманових інтегралів

функції дійсної змінної.

31. Інтегральна теорема Коші та її узагальнення.
32. Незалежність інтеграла від форми шляху інтегрування. Інтеграл та первісна.
33. Теорема Морери. Означення аналітичної функції за Осгудом.
34. Зв'язок між значенням аналітичної функції всередині області і на її межі. Інтегральна формула Коші.
35. Інтегральна формула Коші для похідних аналітичної функції.
36. Аналітичність суми степеневого ряду. Ряд Тейлора.
37. Розвинення аналітичної функції у степеневий ряд. Теорема Тейлора. Означення аналітичної функції за Вейерштрассом.
38. Нулі аналітичної функції. Теорема про канонічне зображення.
39. Теорема Ліувілля і основна теорема алгебри.
40. Ряд Лорана та його збіжність.
41. Розвинення функцій в ряд Лорана. Теорема Лорана.
42. Єдиність розвинення в ряд Лорана.
43. Класифікація ізольованих особливих точок. Нескінченно віддалена точка.
44. Мероморфні функції і характер їх особливостей.
45. Критерій усувної особливості.
46. Поліус, його розпізнання та визначення порядку.
47. Критерій істотної особливості. Теорема Сохоцького-Вейерштрасса.
48. Означення та формули для обчислення лишків.
49. Основна теорема про лишки. Принцип аргументу. Теорема Руше.
50. Застосування теорії лишків.
51. Теорема єдиності.
52. Принцип аналітичного продовження.
53. Задача аналітичного продовження.
54. Продовження співвідношень.
55. Задача аналітичного продовження дійсної функції дійсної змінної у комплексну площину.
56. Правильні та особливі точки степеневого ряду.

Задачі до іспиту

А) Задані комплексні числа z_1 і z_2 . Знайти а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$; д) z_1^n ;

є) всі значення $\sqrt[m]{z_2}$.

1. $z_1 = 5 + 6i$; $z_2 = 7 - 9i$; $n = 2$; $m = 2$. 2. $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 5 + 12i$; $n = 3$; $m = 2$.

3. $z_1 = 1 + 3i$; $z_2 = 3 + 4i$; $n = 4$; $m = 2$. 4. $z_1 = 2 + 2i$; $z_2 = 12 + 5i$; $n = 2$; $m = 2$.

5. $z_1 = 3 - i$; $z_2 = 5 + 6i$; $n = 4$; $m = 3$. б. $z_1 = 4 + 2i$; $z_2 = 1 + 4i$; $n = 2$; $m = 3$.

Б) Записати задані числа z_1 і z_2 у тригонометричній та показниковій формах.

1. $z_1 = 2+i, z_2 = 3\sqrt{3} - i\sqrt{3}$. 2. $z_1 = 1-i, z_2 = (\sqrt{3}+i)/2$.
3. $z_1 = -1+3i, z_2 = (1-i\sqrt{3})/2$. 4. $z_1 = -i, z_2 = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$.
5. $z_1 = 5-4i, z_2 = \sqrt{2}-i\sqrt{2}$. 6. $z_1 = 7+i, z_2 = 1+i\sqrt{3}$.

В) Обчислити (для багатозначних функцій знайти їх головні значення).

1. а) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^i, \bar{b}) \sin(-1-i)$. 2. а) $(i)^{1+i}, \bar{b}) \cos\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$.
3. а) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{1-i}, \bar{b}) \sin(2-i)$. 4. а) $(i)^{\frac{1}{i}}, \bar{b}) \operatorname{ch}(3i-2)$.
5. а) $(-1)^i, \bar{b}) \operatorname{ch}(i+2)$. 6. а) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-i}, \bar{b}) \operatorname{sh}(i+2)$.

Г) Які лінії на комплексній площині визначаються наступними відповідними рівняннями та нерівностями.

1. а) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$, б) $\left\{1 < |z+1-2i| \leq 4, \frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{3\pi}{4}\right\}$.
2. а) $\operatorname{Re}(z^2) = 4$, б) $\left\{|z-2| \geq |1-2\bar{z}|, \frac{\pi}{3} < \arg z \leq \pi\right\}$.
3. а) $\operatorname{Re}(z+2-i) = \operatorname{Im}(z)$, б) $\left\{1 \leq |z-2-2i| \leq 2, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$.
4. а) $\operatorname{Im}(z^2 + 2z) = 2$, б) $\left\{5 < |z-3-2i| < 6, \frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}\right\}$.

Г) З'ясувати, чи є задана функція аналітичною.

1. $\omega = 2\cos^2 z$ 2. $\omega = z\bar{z} + i\operatorname{Im}(z^2)$ 3. $\omega = e^z$ 4. $\omega = \sin z$
5. $\omega = \frac{1}{z}$ 6. $\omega = \left(\frac{-}{z}\right)^2$ 7. $\omega = \operatorname{ch} z$ 8. $\omega = iz^2$

Д) Поновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по відомій уявній або дійсній частині.

1. а) $u = x^2 - y^2$ б) $v = e^x(\cos y + \sin y)$.
2. а) $u = x^3 - 3xy^2$, б) $v = e^y \cos x$.
3. а) $u = e^y \cos x$, б) $v = 2xy + 2y$.
4. а) $u = \cos 2x \cdot \operatorname{ch} 2y$, б) $v = y^2 - x^2 + 2xy$.
5. а) $u = x^3 - 3xy^2 + y^3$, б) $v = \cos y \cdot \operatorname{sh} x$.
6. а) $u = y^2 - x^2$, б) $v = e^{-y} \cos x$.

Е) Обчислити інтеграли.

1. а) $\int_L \bar{z} dz$, де L : відрізок від $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 - i$; б) $\int_0^i (\sin z + \cos z) dz$.

2. а) $\int_L \frac{dz}{\sqrt{z}}$, де L : верхнє півколо $|z|=1$, обхід за годинниковою стрілкою; б) $\int_{1-i}^{1+i} 2z dz$.

3. а) $\int_L z \cdot \bar{z} dz$, де L : верхнє півколо $|z|=2$, обхід проти годинникової стрілки, б) $\int_{-1}^i ze^{z^2} dz$.

4. а) $\int_L \bar{z} dz$, де L : відрізок, що з'єднує $z_1 = i$ та $z_2 = 1$, б) $\int_0^{1+i} \cos z dz$.

5. а) $\int_L (1 - 3i - \bar{z}) dz$, де L : відрізок від $z_1 = 1 + 3i$ до $z_2 = 5 - i$, б) $\int_0^i z \sin z dz$.

6. а) $\int_L \operatorname{Re} z dz$, де L : відрізок, що з'єднує $z_1 = 0$ та $z_2 = 2 + i$, б) $\int_{1-i}^{1+i} ze^z dz$.

Є) Обчислити інтеграли за допомогою інтегральної формули Коші

1. а) $\oint_{|z-2|=2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{z^4 - 1}$, б) $\oint_{|z|=3} \frac{5z dz}{(z+2)(z-i)}$, в) $\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z dz}{(z-1)^3}$.

2. а) $\oint_{|z-1-i|=1} \frac{\sin \pi(z-1) dz}{z^2 - 2z + 2}$, б) $\oint_{|z-2i|=3} \frac{\ln z dz}{(z-4i)(z-i)}$, в) $\oint_{|z-3|=2} \frac{z dz}{(z-4)^4}$.

3. а) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z+i\pi) dz}{z(z^2+2)}$, б) $\oint_{|z-2|=3} \frac{\cos z dz}{z^2 - 4z}$, в) $\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z dz}{z^3}$.

4. а) $\oint_{|z-2i|=3} \frac{\cos z dz}{z^2 + 4}$, б) $\oint_{|z+2i|=2} \frac{\operatorname{sh}(\pi z/2) dz}{(z+i)(z+3i)}$, в) $\oint_{|z-2|=2} \frac{e^{iz} dz}{(z-1)^4}$.

6. б) $\oint_{|z|=3} \frac{z dz}{(z-1)(z-2)}$, в) $\oint_{|z-i|=2} \frac{\cos \pi z dz}{z^3}$.

6. а) $\oint_{|z|=3} \frac{z dz}{z^2 - 3z + 2}$, б) $\oint_{|z-i|=2} \frac{\cos z dz}{(z-2i)(z-i)}$, в) $\oint_{|z|=1/2} \frac{(1 - \sin z) dz}{z^2}$.

Ж) Знайти радіус збіжності степеневого ряду

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1+i)^n}$ 2. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3+i}{2}\right)^n z^n$ 3. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(2+i)z^n}{\sqrt{n^2+4i}}$ 5. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n$ 6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n+i} z^n$

З) Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)$ по степенях z в заданому кільці.

1. $f(z) = \frac{1}{z^2 - z}$, $0 < |z| < 1$. 2. $f(z) = \frac{z^2 + 3z - 7}{z^3 - 3z^2 + 4}$, $1 < |z| < 2$.

3. $f(z) = \frac{3}{z^2 - z - 2}$, $1 < |z| < 2$. 4. $f(z) = \frac{2}{z^2 + 2z}$, $0 < |z| < 2$.

$$5. f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}, \quad 2 < |z| < \infty. \quad 6. f(z) = \frac{1}{z^2 + 5z + 6}, \quad 2 < |z| < 3.$$

И) З'ясувати характер особливих точок функції $f(z)$ і знайти лишки в цих точках.

$$1. f(z) = \frac{\sin z}{z^4 + 2z^3 + z^2} \quad 2. f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^4 - 3z^3 + 2z} \quad 3. f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^5}$$

$$4. f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^3 + z^2} \quad 5. f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+4)} \quad 6. f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{(1-z^2)(z+1)}$$

І) Обчислити інтеграли за допомогою лишків

$$1.a) \oint_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{(z^2+1)^2} \quad б) \oint_{|z-2i|=3} (z-2i)^3 \operatorname{ch} \frac{1}{z-2i} dz \quad в) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$$

$$2.a) \oint_{|z-1|=3} \frac{z dz}{(z+2)^2(z-1)} \quad б) \oint_{|z|=2} (z+i)^2 \sin \frac{1}{z+i} dz \quad в) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+13)^2}$$

$$3.a) \oint_{|z-3|=3} \frac{z dz}{(z-4)^3(z-3)} \quad б) \oint_{|z+1|=1} (z+1)^3 e^{\frac{1}{z+1}} dz \quad в) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+17)^2}$$

11. РЕКОМЕНДОВАНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ДЖЕРЕЛА

Базова

1. Сніжко Н.В. Елементи теорії функцій комплексної змінної. - Запоріжжя, ЗДУ, 1993.
2. Сніжко Н.В. Типові завдання з теорії функцій комплексної змінної. - Запоріжжя: ЗНУ, 2005. - 26с.
3. Соколов Ю.В. Елементи теорії функцій комплексної змінної.

Методичне забезпечення

1. Методичні вказівки до самостійної роботи з навчальної дисципліни «Теорія функцій комплексної змінної»
2. Костіков О.А. Конспект лекцій «Теорія функцій комплексної змінної» – Краматорськ. - 2020.
3. Костіков О.А. «Теорія функцій комплексної змінної»: методичні вказівки до семінарських занять та самостійної роботи для студентів спеціальності 014 Середня освіта (математика) – Краматорськ : ДДМА, 2021.
4. Сніжко Н.В. Контрольна робота з теорії функцій комплексної змінної. - Запоріжжя: ЗНУ, 2005. - 17с.

Інформаційні ресурси

1. http://internal.khntusg.com.ua/fulltext/pazk/UCHEBNIKI/BM_2015_455.pdf
2. http://ztimathan.chnu.edu.ua/?page_id=195

ВРАЗКИ ЗАВДАНЬ МОДУЛЬНИХ КОНТРОЛІВ

Модуль Комплексні числа. Функції комплексного змінного. Диференціювання та інтегрування функцій комплексного змінного

Кожне завдання оцінюється в 5 балів

1. Задані комплексні числа $z_1 = 2 + i$ та $z_2 = 3 - 3i$. Знайти а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$; д) z_1^4 ; є) всі значення $\sqrt[3]{z_2}$.

2. Записати задані числа $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$, у тригонометричній та показниковій формах.

3. Які лінії на комплексній площині визначаються рівняннями:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z+i}\right) = 1/$$

4. Обчислити (для багатозначних функцій знайти головні значення): а) $\operatorname{sh}(i-1)$.

5. Знайти область аналітичності функції $\omega = \ln z$.

6. Знайти аналітичну функцію $\omega = f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ за її відомою дійсною $u(x; y)$ або уявною $v(x; y)$ частиною:

$$u = e^x(x \cos y - y \sin y);$$

7. Обчислити інтеграли: а) $\int_L \bar{z} dz$, де L : нижнє півколо $|z|=1$, за годинниковою стрілкою, $\int_0^i z \cos z^2 dz$.

8. Обчислити інтеграли за допомогою інтегральної формули Коші: $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^3 + 9z}$

Модуль Ряди аналітичних функцій. Ізольовані особливі точки однозначної функції. Теорія лишків. Гармонічні функції

Кожне завдання оцінюється в 10 балів

1. Знайти радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi i}{\sqrt{n}}\right)^n z^n$.

2. Знайти розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана у вказаній області:

$$f(z) = \frac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2}, \quad 1 < |z| < 2.$$

3. Класифікувати ізольовані особливі точки функції $f(z)$ (окрім $z = \infty$), та знайти в цих точках лишки функції:

$$\text{а) } f(z) = \frac{e^{iz} - 1}{\sin z}, \quad \text{б) } f(z) = \frac{z^4 - 1}{(z-i)^3}.$$

4. Обчислити інтеграли за допомогою лишків:

$$\text{a) } \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{ctg} z}{4z - \pi} dz; \quad \text{б) } \oint_{|z|=\frac{1}{2}} (z+1)e^{\frac{1}{z}} dz \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$